Information (1)

Begrifflichkeiten

https://iuk.one/RNDS-INFO-1.pdf

Clemens H. **Cap**
ORCID: 0000-0003-3958-6136

Department of Computer Science
University of **Rostock**
Rostock, Germany
clemens.cap@uni-rostock.de



2026-11-22 20:45

Ziele

Informatik gilt auch als **Wissenschaft von der Information.**

Was ist Information **genau**?

Und was ist dann Kommunikation **genau**?

Information

Information ist ein Konzept zur Auflösung von Unsicherheit

Information repräsentiert die **Auswahl des Konkreten aus dem Möglichen.**

Information ist ein **Mechanismus, um Dinge zu konstruieren.**

Weitere mögliche Sichtweisen:

1. Ein (logarithmisches) Maß für Wahrscheinlichkeit.
2. Ein Maß für empirische Häufigkeit.
3. Ein Maß für die Bereitschaft, eine Wette in bestimmter Höhe abzuschließen.

Inhaltsübersicht

1. Wahrscheinlichkeit

1.1. Grundlagen

1.2. Würfelexperimente

1.3. Laplacesches Indifferenzprinzip

2. Information (nach Shannon)

3. Information (nach Chaitin)

4. Kommunikation

1. Wahrscheinlichkeit

1.1. Grundlagen

1.2. Würfelexperimente

1.3. Laplacesches Indifferenzprinzip

Wahrscheinlichkeit ist die Grundlage des Informationsbegriffs nach Shannon.
Wir wiederholen die Grundprinzipien der Wahrscheinlichkeit und wenden sie auf einfache Beispiele an.

1. Wahrscheinlichkeit

2. Information (nach Shannon)

3. Information (nach Chaitin)

4. Kommunikation

Wahrscheinlichkeit

Ein **Experiment** hat einen präzise beschriebenen Ablauf.

Ein **Elementarereignis** ist das kleinste, eigenständig mögliche Ergebnis eines Experiments.

Ein **Ereignis** ist eine Menge von Elementarereignissen.

Beispiele für Wahrscheinlichkeits-Experimente

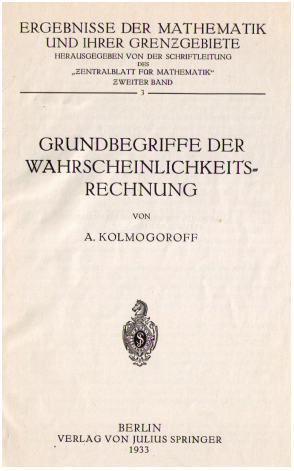
Beispiel: Münzwurf

Experiment: *Einmal* mit *einer* Münze werfen und das Ergebnis notieren.
Menge der Elementarereignisse: $M = \{\texttt{Kopf}, \texttt{Zahl}\}$ (insgesamt 2)
Bsp. für ein Elementarereignis: `Kopf`
Menge aller Ereignisse: $2^M = \{\ \{\texttt{Kopf}, \texttt{Zahl}\}\ ,\ \{\texttt{Kopf}\}\ ,\ \{\texttt{Zahl}\}\ ,\ \emptyset\ \}$ (insgesamt 4)

Beispiel: Würfel

Experiment: *Einmal* mit *einem* Würfel würfeln und das Ergebnis notieren.
Menge der Elementarereignisse: $M = \{\boxdot, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$
Bsp. für ein Elementarereignis: ⚂
Bsp. für ein Ereignis: "Ungerade Augenzahl", als Menge $U = \{\boxdot, ⚂, ⚄\}$.

Kolmogoroff


ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
ZWEITER BAND
3

GRUNDBEGRIFFE DER
WAHRSCHEINLICHKEITS-
RECHNUNG

VON

A. KOLMOGOROFF

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

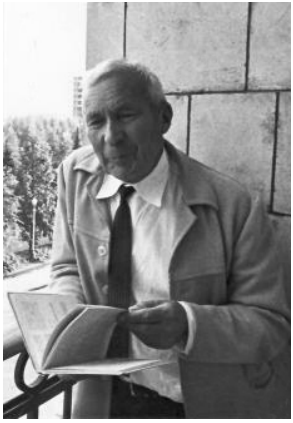


Abb. 1: Andrej **Kolmogoroff** (1942–1987), russischer Mathematiker, Erfinder der axiomatischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, neben seinem Werk. Rechte s. Anhang.

4 Axiome von Kolmogoroff (sprachlich)

Sei M eine Menge von Elementarereignissen und bezeichne 2^M die Potenzmenge von M.

Eine Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion $P\colon 2^M \to [0,1]$ für die gilt:

1. Wahrscheinlichkeit des **sicheren Ereignisses** ist 1:
2. Wahrscheinlichkeit des **unmöglichen Ereignisses** ist 0.
3. Wahrscheinlichkeit des **Nichteintretens** ist 1 – Wahrscheinlichkeit des Eintretens.
4. Wird ein Ereignis aus **Teilereignissen** so zusammengesetzt, daß je zwei den leeren Durchschnitt haben, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse.

4 Axiome von Kolmogoroff (formeltechnisch)

Sei M eine Menge von Elementarereignissen und bezeichne 2^M die Potenzmenge von M.

Eine Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion $P\colon 2^M \to [0,1]$ für die gilt:

$$P(M) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\complement A) = 1 - P(A)$$

Wenn $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq M$ mit $\forall i,j : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ dann

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Beispiele: 4. Axiom von Kolmogoroff (1)

Frage: Was besagt das 4. Axiom am Würfelexperiment mit den Elementarereignissen $M = \{\boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot\}$.

Bsp 1: $A_1 = \{\boxdot, \boxdot, \boxdot\}$ und $A_2 = \{\boxdot, \boxdot, \boxdot\}$. Voraussetzungen erfüllt? Ja!
Also: $P(\{\boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot\}) = P(\{\boxdot, \boxdot, \boxdot\}) + P(\{\boxdot, \boxdot, \boxdot\})$.

Bsp 2: $A_1 = \{\boxdot, \boxdot\}$ und $A_2 = \{\boxdot\}$. Voraussetzungen erfüllt? Ja!
Also: $P(\{\boxdot, \boxdot, \boxdot\}) = P(\{\boxdot, \boxdot\}) + P(\{\boxdot\})$.

Bsp 3: $A_1 = \{\}$ und $A_2 = \{\boxdot\}$. Voraussetzungen erfüllt? Ja!
Also: $P(\{\boxdot\}) = P(\{\}) + P(\{\boxdot\})$.
Dann muß auch $P(\{\}) = 0$ sein?!
Das ist nach dem 2. Axiom der Fall!

Beispiele: 4. Axiom von Kolmogoroff (2)

Bsp. 4: $A_1 = \{\boxdot\}$ und $A_2 = \{\boxdot, \boxdot\}$. Voraussetzungen nicht erfüllt, da $A_1 \cap A_2 = \{\boxdot\}$.
Also ist auch nichts weiter zu tun.

Bsp. 5: $A_1 = \{\boxdot, \boxdot\}$ $A_2 = \{\boxdot, \boxdot\}$ $A_3 = \{\boxdot, \boxdot\}$. Voraussetzungen erfüllt?
Hier ist mehr zu prüfen: $A_1 \cap A2 = \{\}$, $A_2 \cap A_3 = \{\}$ und $A_1 \cap A_3 = \{\}$. Ja!
Also: $P(\{\boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot\}) = P(\{\boxdot, \boxdot\}) + P(\{\boxdot, \boxdot\}) + P(\{\boxdot, \boxdot\})$

Bsp. 6: $A_1 = \{\boxdot\}$ und $A_2 = \{\boxdot\}$. Voraussetzungen erfüllt? Ja.
Also: $P(\{\boxdot, \boxdot\}) = P(\{\boxdot\}) + P(\{\boxdot\})$

Bsp. 7: $A_1 = \{\boxdot\}$ und $A_2 = \{\boxdot\}$ und $A_3 = \{\boxdot\}$. Voraussetzungen erfüllt? Ja.
Also: $P(\{\boxdot, \boxdot, \boxdot\}) = P(\{\boxdot\}) + P(\{\boxdot\}) + P(\{\boxdot\})$

Bedeutung des 4. Axioms von Kolmogoroff

Satz über endliche Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E = \{e_1, e_2, \ldots e_k\}$,
das die *endlich vielen* **Elementar**ereignisse $e_1, e_2, \ldots, e_k$ umfaßt,
ist die **Summe** der Wahrscheinlichkeiten aller dieser **Elementar**ereignisse.

$$P(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \ldots + P(\{e_k\}) = \sum_{j=1}^{k} P(\{e_j\})$$

Folge: Bei Experimenten mit endlich vielen möglichen Ergebnissen ist die Wahrscheinlichkeit aller Ereignisse bereits durch die Wahrscheinlichkeiten der **Elementarereignisse eindeutig** festgelegt.

Beschreibung eines Experiments

Gegeben: Ein Würfel mit Aufschrift: ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅.

Gesucht: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine ⚀ zu werfen?

Formal: Menge der Elementarereignisse ist $M = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$
Gesuchtes Ereignis ist $E = \{⚀\}$.
Berechne $P(E)$.

Vorgehen: Finde eine Funktion $P : P(M) \to [0, 1]$,
welche die Axiome von Kolmogoroff erfüllt.
Bilde dann $P(E)$.

Wissen: Es genügt, die Elementarereignisse zu betrachten !

1. Lösung

$P(\{\boxdot\}) = 1$

$P(\{\boxdot\}) = 0$

$P(\{\boxdot\}) = 0$

$P(\{\boxdot\}) = 0$

$P(\{\boxdot\}) = 0$

$P(\{\boxdot\}) = 0$

Interpretation: Würfel, der immer auf der $\boxdot$ landet.

Antwort: $P(\{\boxdot\}) = 1$

Erklärung: Gegenseite mit Blei beschwert.

2. Lösung

$$P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{\boxdot\}) = 0$$

$$P(\{\boxdot\}) = 0$$

$$P(\{\boxdot\}) = 0$$

$$P(\{\boxdot\}) = 0$$

$$P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{2}$$

Interpretation: Würfel, der immer auf der ⊡ oder ⊡ landet.

Antwort: $P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{2}$

Erklärung: Achse ⊡—⊡ mit Blei beschwert.

3. Lösung

$$P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{6}$$

Interpretation: Fairer Würfel.

Antwort: $P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{6}$

Erklärung: Keine besondere.

Analyse und Experiment

Alle diese Lösungen (und weitere) sind korrekt und in der Würfelpraxis möglich!

Wenn wir nur **ein** Ergebnis haben wollen, so ist eine zusätzliche Annahme erforderlich!

Unser **Bauchgefühl** sagt uns: $P(\{\boxdot\}) = \frac{1}{6} = 0,1666\ldots = 16,666\ldots\,\%$

Wir machen **Experimente:**

1. Experiment mit 10 Würfen ergibt: 20% aller Würfe ergeben $\boxdot$.
2. Experiment mit 10 Würfen ergibt: 0% aller Würfe ergeben $\boxdot$.
3. Experiment mit 100 Würfen ergibt: 15% aller Würfe ergeben $\boxdot$.
4. ...

Experimente bedürfen der Interpretation und können Schwankungen aufweisen.

Zusätzliche Annahme

Wenn wir **annehmen**, daß der Würfel exakt symmetrisch gebaut ist,
dann ist die **Schlußfolgerung** sinnvoll, daß alle Seiten gleich wahrscheinlich sind.

$$P(\{\boxdot\}) = P(\{\boxdot\}) = P(\{\boxdot\}) = P(\{\boxdot\}) = P(\{\boxdot\}) = P(\{\boxdot\}) := \lambda$$

Wir wissen:

$$P(\{\boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot\}) = 1$$

Wir wissen ferner:

$$P(\{\boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot\}) = \text{ 4. Axiom von Kolmogoroff}$$
$$P(\{\boxdot\}) + P(\{\boxdot\}) + P(\{\boxdot\}) + P(\{\boxdot\}) + P(\{\boxdot\}) + P(\{\boxdot\}) = 6 \cdot \lambda$$

Also $6 \cdot \lambda = 1$ und somit $\lambda = \frac{1}{6}$ und daher **Lösung:** $P(\{\boxdot) = \frac{1}{6}$.

Beobachtung: Erst die Zusatzannahme ergab eine eindeutige Lösung.

Laplacesches Indifferenzprinzip

Prinzip: Wenn wir eine Situation mit genau n verschiedenen Elementarereignissen betrachten und keinen Grund haben, anzunehmen, daß ein bestimmtes davon wahrscheinlicher ist als ein anderes, dann *nehmen wir an*, daß sie *alle gleichwahrscheinlich* sind.

Beachte: Das ist eine sinnvolle Annahme – aber *keine* Aussage, die aus Axiomen folgt.

Anwendung: Sei n die Anzahl aller möglichen Ereignisse. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines **Elementarereignisses** E

$$P(E) = \frac{1}{n}$$

Anwendung: Sei nun E ein Ereignis **bestehend aus** k **Elementarereignissen**. Dann ist seine Wahrscheinlichkeit:

$$P(E) = \frac{k}{n}$$ sogenannte **Laplacesche Formel**

Abb. 2: Pierre-Simon **Laplace** (1749-1827), französischer Mathematiker, Physiker und Astronom, der auch etliche Beiträger zur Wahrscheinlichkeitstheorie geliefert hat.
Rechte s. Anhang.



2. Information (nach Shannon)

Wir lernen den Informationsbegriff von Shannon kennen, der eine zentrale Rolle in der Informatik spielt.

1. Wahrscheinlichkeit

2. Information (nach Shannon)

3. Information (nach Chaitin)

4. Kommunikation

Motivation

Idee: Je unwahrscheinlicher ein Ereignis, desto höher sein Informationsgehalt. Information ist ein **Maß für Überraschung**.

Beispiel: "Eine ⚅ geworfen" hat mehr Information als "gerade Augenzahl"

Beispiel: Der kurze Zufallstext "Babalilu" hat weniger Info als Goethes Faust.

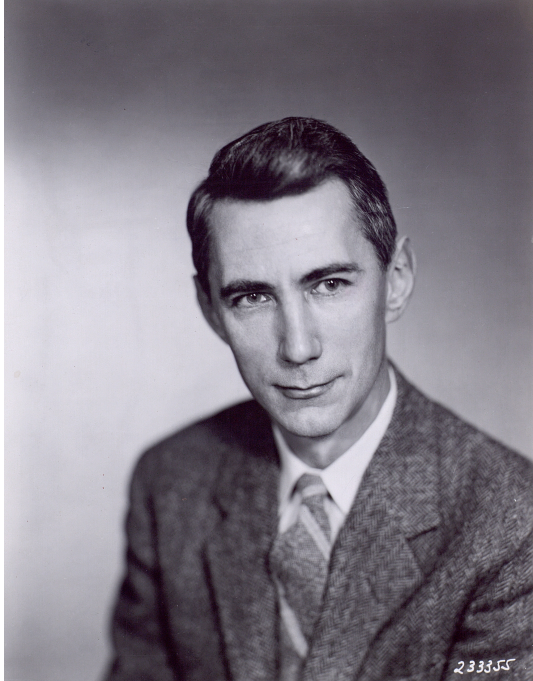
Problem 1: **Kenntnis** der Wahrscheinlichkeiten.
WEnn Wahrscheinlichkeiten unbekannt sind Annahmen nötig.

Problem 2: **Subjektivität** der Wahrscheinlichkeiten.
Persönliche Aspekte beeinflussen die Annahmen.

Problem 3: **Formale Schwierigkeiten** bei unendlichen vielen Möglichkeiten.

Beispiel: "Nennen Sie eine zufällige reelle Zahl!"
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Sie die Zahl π nennen?

Abb. 3: Claude **Shannon** (1916-2001), US-amerikanischer Mathematiker, der als Erfinder der statistischen Informationstheorie gilt. Rechte s. Anhang.



1. Axiom der Informationstheorie

1. Axiom

Das **Informationsmaß** I_P eines Ereignisses E ist eine (1) **stetige** und (2) **injektive** (3) **Funktion** seiner Wahrscheinlichkeit P.

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} = [0,+\infty] \qquad I_P(E) = f(\,P(E)\,)$$

Das bedeutet: **Zu** jedem Wahrscheinlichkeitsmaß P gehört ein Informationsmaß I_P.

Motivation des Axioms:

1. **Funktion:** Gleiche Wahrscheinlichkeit führt auf gleichen Informationsgehalt.
2. **Injektiv:** Gleicher Informationsgehalt erfordert gleiche Wahrscheinlichkeit.
3. **Stetig:** Kleine Änderung in Wahrscheinlichkeit führt zu kleiner Änderung im Informationsgehalt.

Unabhängigkeit: Motivation (1)

Experiment: Mit einer Euro und einer USD Münze werfen, Ergebnis notieren.
Genauer: Das Euro-Ergebnis zuerst, danach das Dollar-Ergebnis.

Menge der **Elementarereignisse:** $M = \{(K,K),\ (K,Z),\ (Z,K),\ (Z,Z)\}$.

Wir haben 4 Elementarereignisse. Wir wenden die Laplace-Regel an:

$$P(\{(K,K)\}) = \frac{1}{4} \qquad P(\{(K,Z)\}) = \frac{1}{4} \qquad P(\{(Z,K)\}) = \frac{1}{4} \qquad P(\{(Z,Z)\}) = \frac{1}{4}$$

Wir berechnen:

$$P_{\text{Euro-Kopf } \textbf{und} \text{ Dollar-Zahl}} = P(\{(K,Z)\}) = \frac{1}{4}$$

$$P_{\text{Euro-Kopf}} = P(\{(K,K),\ (K,Z)\}) = P(\{(K,K)\}) + P(\{(K,Z)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\text{Dollar-Zahl}} = P(\{(K,Z),\ (Z,Z)\}) = P(\{(K,Z)\}) + P(\{(Z,Z)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Unabhängigkeit: Motivation (2)

Wir haben also *zwei identische Ergebnisse:*

$$\underbrace{P_{\text{Euro-Kopf } \textbf{und} \text{ Dollar-Zahl}}}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = \underbrace{P_{\text{Euro-Kopf}}}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P_{\text{Dollar-Zahl}}}_{\frac{1}{2}}$$

Es kann aber in einem **anderen Fall** auch so sein:

Wenn der Euro Kopf zeigt, **dann** zeigt der Dollar Zahl (magnetische Koppelung).
Euro-Kopf und Dollar-Kopf treten niemals gemeinsam aus.
Es gibt eine Art wechselseitiger Abhängigkeit der Ergebnisse.
Wir finden eine andere Funktion, zur Unterscheidung nennen wir sie Q.
Nach der Laplace-Regel erhalten wir:

$$Q(\{(K,K)\}) = 0 \qquad Q(\{(K,Z)\}) = \frac{1}{3} \qquad Q(\{(Z,K)\}) = \frac{1}{3} \qquad Q(\{(Z,Z)\}) = \frac{1}{3}$$

Unabhängigkeit: Motivation (3)

Wir berechnen:

$$Q_{\text{Euro-Kopf } \textbf{und} \text{ Dollar-Zahl}} = Q(\{(K,Z)\}) = \frac{1}{3}$$

$$Q_{\text{Euro-Kopf}} = Q(\{(K,K),\ (K,Z)\}) = Q(\{(K,K)\}) + Q(\{(K,Z)\}) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$Q_{\text{Dollar-Zahl}} = Q(\{(K,Z),\ (Z,Z)\}) = Q(\{(K,Z)\}) + Q(\{(K,Z)\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Wir haben also *zwei verschiedene Ergebnisse:*

$$Q_{\text{Euro-Kopf } \textbf{und} \text{ Dollar-Zahl}} = \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{Q_{\text{Euro-Kopf}}}_{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{Q_{\text{Dollar-Zahl}}}_{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}$$

Unabhängigkeit: Definition

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt

$$P(A \textbf{ und } B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Anschaulich bedeutet Unabhängigkeit: Ob das **eine** Ereignis eingetreten ist, hat keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des **anderen** Ereignisses.

Hinweis: Man kann das noch viel tiefer begründen über die bedingte Wahrscheinlichkeit.

2. Axiom der Informationstheorie

2.Axiom

Sind A und B unabhängige Ereignisse, dann ist der Informationsgehalt des gemeinsamen Ereignisses $A \cap B$ gleich der Summe der Informationen der Einzelereignisse.

Anschauliche Motivation des Axioms:

1. Wenn ich zwei von einander *unabhängige* Zeitungen lese, etwa die New York Times vom 1. 1. 2012 und die FAZ vom 1. 1. 2019, dann ist die erhaltene Information die Summe der Informationen beider Zeitungen.
2. Wenn die Zeitungen aber nicht unabhängig sind, etwa weil sie voneinander abschreiben oder über denselben Tag berichten, dann ist die aus beiden Zeitungen erhaltene Information weniger als die Summe der Informationen beider Zeitungen.

3. und 4. Axiom der Informationstheorie

3. Axiom: Information des sicheren Ereignisses

Das **sichere Ereignis** enthält überhaupt keine Information.

$$I(M) = 0$$

4. Axiom: Information des unmöglichen Ereignisses

Das **unmögliche Ereignis** enthält unendlich viel Information.

$$I(\emptyset) = +\infty$$

Formel für die Information

Satz vom Informationsgehalt

Der **Informationsgehalt** ist ein **negativer Logarithmus der Wahrscheinlichkeit**.

Genauer: Ist I ein Maß für den Informationsgehalt und P ein dazugehöriges Maß für die Wahrscheinlichkeit, dann gibt es eine positive Zahl $b \in \mathbb{R}^+$ so, daß für alle Ereignisse E gilt:

$$I(E) = -\log_b(P(E)) \qquad I = -\log_b \circ P$$

Die Wahl der Basis b des Logarithmus legt die Einheit der Information fest:

Basis b	**Logarithmus**	**Name der Einheit**
2	binärer Logarithmus	[bit] (übliche Wahl der Informatik)
e=2.71828...	Natürlicher Logarithmus	[nat]
10	dekadischer Logarithmus	[Hartley]

Tab. 1: Einheiten für das Maß der Information

Genauere Analyse des 3. und 4. Axioms

Axiom 3 paßt zur Formel wegen:

$$I(M) = 0 \qquad \text{weil } P(M) = 1 \text{ und } \log(1) = 0$$

Axiom 4 paßt zur Formel wegen:

$$I(\emptyset) = +\infty \qquad \text{weil } P(\emptyset) = 0 \text{ und } \log(0) = -\infty$$

Streng genommen ist $\log(0)$ nicht definiert. Wir wissen aber: $\lim_{h \to +0} \log(h) = -\infty$. Aufgrund der Stetigkeit (Axiom 1) ist das also sinnvoll.

Beispiel: Informationsgehalt gezogener Kugel

Situation: In einem Becher befinden sich eine rote, eine blaue und eine grüne Kugel.
Alice zieht eine Kugel.
Alice ruft aus *"Die Kugel ist rot"*.

Aufgabe: Bestimme den Informationsgehalt dieser Nachricht?

Lösung: Es gibt drei Elementarereignisse: rot, grün, blau.
Wir haben keine weiteren Hinweise.
Daher ist die Regel von Laplace anwendbar.

$$P(\{\text{rot}\}) = P(\{\text{grün}\}) = P(\{\text{blau}\}) = \frac{1}{3}$$

Ergebnis: Der Informationsgehalt beträgt:

$$I_P(\{\textit{rot}\}) = -\log_2\left(\frac{1}{3}\right) = \log_2(3) = 1.584\ldots \text{ [bit]}$$

Bits und Bit: Codierung und Informationsgehalt

Bits: Um aus n verschiedenen Optionen genau eine Option **eindeutig mit binären Symbolen zu kodieren** werden

$$\textbf{ceil}\left(\log_2(n)\right) = \lceil \log_2(n) \rceil$$

binäre Symbole ("Bits") benötigt.

bit: Der **Informationsgehalt einer Auswahlentscheidung** aus n verschiedenen Optionen ist bei Annahme von Gleichwahrscheinlichkeit aller Optionen für jede einzelne Option gegeben durch:

$$-\log_2\left(\frac{1}{n}\right) = \log_2(n) \ \text{[bit]}$$

Hinweis: Die Funktion $\textbf{ceil}(\cdot) = \lceil \cdot \rceil$ ist die Rundung nach oben.

3. Information (nach Chaitin)

Neben dem Informationsbegriff von Shannon gibt es noch weitere Informationsbegriffe.
Hier: Informationsbegriff nach Chaitin.

1. Wahrscheinlichkeit

2. Information (nach Shannon)

3. Information (nach Chaitin)

4. Kommunikation

Motivation

Idee: Je mehr ich "erzählen" muß, um ein Ereignis zu beschreiben, um so höher ist sein Informationsgehalt.

Definition: Der Informationsgehalt eines Wortes ist die Anzahl Buchstaben *eines* kürzesten Programms, das dieses Wort ohne jede Eingabe ausdruckt.

Beispiel 1: `"aidnezrtcvwgemqptkgudhrfbendsf"` hat mehr Information als `"11111111111111111111111111111"`
Den zweiten Text kann ich knapper beschreiben als den ersten.

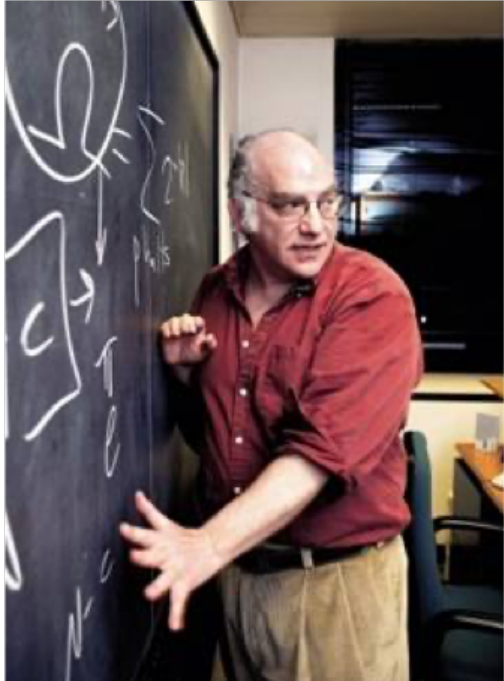
Beispiel 2: Der Informationsgehalt der Zahl $\pi = 3.1415926\ldots$ ist die Länge *eines* kürzesten Programms, das **alle** Dezimalstellen von π ausgibt.

Nutzanwendung

Beachte: Abhängig von der gewählten Beschreibungs- oder Programmiersprache wären Einheiten [C], [Pascal], [Javascript] denkbar.
Umrechnung ist möglich, aber nicht mit multiplikativen Faktoren.

Problem: Die "Länge des kürzesten Programms" ist nicht sinnvoll berechenbar.
Details dazu finden sich in einem Kurs zu Berechenbarkeit.

Abb. 4: Gregory **Chaitin** (geb. 1947), argentinischer Mathematiker, einer der Erfinder der algorithmischen Informationstheorie. Rechte s. Anhang.



Roulette

Alice spielt gerne Roulette. Sie setzt nur auf die Farben rot und schwarz.

Bob meint: "Jetzt ist sieben Mal hintereinander rot gekommen. Du mußt jetzt auf schwarz setzen. Jetzt kommt sicher bald schwarz."

Frage 1: Hat **Bob** recht?

Alice entgegnet: "Nein, die Wahrscheinlichkeit von rot und schwarz ist in jeder Runde gleich. Ich wette 10 €, daß jetzt wieder rot kommt."

Bob antwortet: "Nein. Schwarz ist jetzt wahrscheinlicher. Ich wette 15 € auf schwarz."

Frage 2: Was wetten Sie?

Das Beispiel weist auch auf den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und der Bereitschaft hin, Wetten zur selben oder zu einer anderen Höhe abzuschließen als der Wettpartner. (Das würde auf einen weiteren Informationsbegriff führen).

Umfrage: Roulette

Wer hat Recht?

1. Alice
2. Bob
3. Keiner von beiden



https://twbk.de/21ph

Umfrage: Informationsgehalt nach Chaitin

Betrachte die beiden unteren Symbolketten!

Welche hat nach **Chaitin** einen höheren Informationsgehalt?

1. 10110100000110111010000010
2. 11111111111111111111111111



https://twbk.de/21ph

Umfrage: Informationsgehalt nach Shannon

Betrachte die beiden unteren Symbolketten!

Welche hat nach **Shannon** einen höheren Informationsgehalt (unter Annahme von Gleichverteilung auf $\{0, 1\}$)?

1. 10110100000110111010000010
2. 11111111111111111111111111



https://twbk.de/21ph

4. Kommunikation

Kommunikation als Übertragung von Information

1. Wahrscheinlichkeit

2. Information (nach Shannon)

3. Information (nach Chaitin)

4. Kommunikation

Was ist Kommunikation?

Sprachlich: Lateinisch *communicare* bedeutet: Mitteilen, teilnehmen lassen.

Technisch: Übertragung von Information mit Hilfe physikalischer Zustände.



Abb. 5: Kommunikation im Kontext der Übergänge zwischen Information und physikalischem Zustand und unter dem Einfluß von Störungen. Rechte s. Anhang.

Beachte: Bei jeder Übertragung können Störungen auftreten.
Zustände kommen (hoffentlich: *nur leicht*) anderes an, als gesendet.
Auch Informationen können dadurch verfälscht werden.

Kritik der Definition

Die Definition "*Kommunikation ist Informationsübertragung*" ist **sehr schlecht**.

Denn: Es geschieht nur eine Reduktion eines Begriffes auf einen anderen Begriff, der selber aber *nicht* wirklich klarer ist.

Denn: Was ist jetzt genau "*Informationsübertragung*"?

Es passiert **keine Klärung** charakteristischer Eigenschaften.

Es entsteht aber der **Eindruck** eines *scheinbaren* Verständnisses, da man nun über ein neues Wort verfügt.

Zumindest erleichtert die Definition aber Prüfungsvorgänge.

Versuch: Erklärung als Korrelation

Idee: Zustand beim Sender korreliert mit Zustand beim Empfänger.

Experiment: Sender und Empfänger protokollieren die Zustände ihrer Geräte.

Sender: Morsetaste kann in 2 Zuständen α und β sein.

Empfänger: Anzeigelampe kann in 2 Zuständen 0 und 1.

Partei	**1**	**2**	**3**	**4**
Alice	α	α	β	α
Bob	0	0	1	0

Tab. 2: Protokoll einzelner Durchläufe eines Experiments zur Prüfung der Definition von Kommunikation.

Frage: War das "*Informationsübertragung*"? Von wem zu wem?

Beachte: Erst wenn wir eine Definition haben, die es einem Beobachter erlaubt, diese Frage eindeutig zu beantworten,
wissen wir, was "*Kommunikation*" ist!

Kritik des Versuchs

Beobachtung: "*Wenn* bei Alice α passiert, *dann* passiert bei Bob 0."

Die sprachliche Formulierung **suggeriert**, daß die Ursache bei Alice liegt.

Aber: Es könnte gerade umgekehrt sein, was durch die Beobachtung auch gestützt wird.

Besser daher: "Die Zustände α bei Alice und 0 bei Bob *treten immer gemeinsam auf*."

Analyse: Unser Verstand sucht nach einem Mechanismus, der das gemeinsame Auftreten erklärt.

Erklärung 1: Alice sendet an Bob.

Erklärung 2: Bob sendet an Alice.

Erklärung 3: Carol sendet an Alice und Bob.

Erklärung 4: Superdeterminismus: Alles ist vorherbestimmt.

Erklärung 5: Unsere Erwartung eines solchen Mechanismus ist falsch.

Zwei logische Irrtümer

Cum hoc ergo propter hoc: Mit diesem, deshalb wegen diesem.

Wenn zwei Phänomene A und B **gemeinsam miteinander** auftreten,
dann muß deshalb **nicht** das eine Phänomen die **Ursache** des anderen sein.

Gemeinsames Auftreten bedeutet nicht Kausalität.

Post hoc ergo propter hoc: Nach diesem, deshalb wegen diesem.

Wenn ein Ereignis A **nach** einem Ereignis B geschieht,
dann muß deshalb **nicht** das frühere Ereignis die **Ursache** des späteren Ereignisses sein.

Sequentielles Auftreten bedeutet nicht Kausalität.

Diese beiden logischen Irrtümer gehören zu den
häufigsten und schlimmsten wissenschaftlichen Fehlern.

Sie finden sich leider recht häufig in Populärwissenschaft und Wissenschaftsjournalismus.

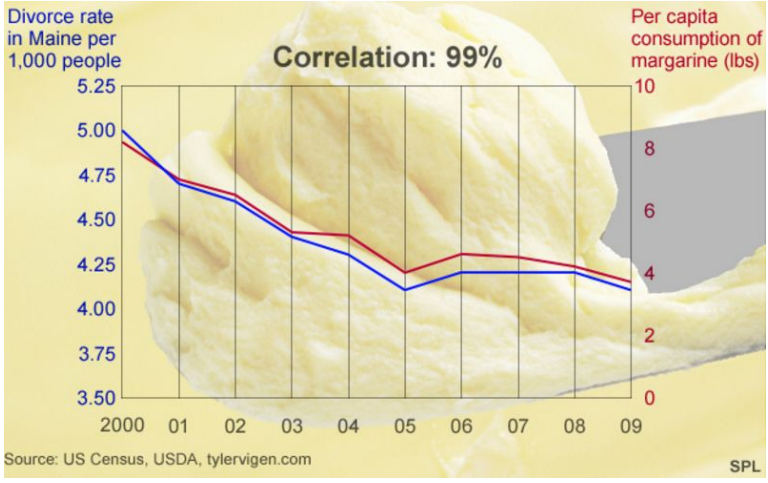


Abb. 6: In Maine verursacht Margarine Ehescheidungen. (Oder frisch Geschiedene ernähren sich von Margarine). Ein berühmtes Beispiel sogenannter **spurious correlations**, gemeinsam auftretende Effekte, die nicht kausal verbunden sind. Hier zitiert nach James Fletcher, BBC News, 2014. Quelle: https://www.bbc.com/news/magazine-27537142.
Rechte s. Anhang.

Richtige Vorgehensweise zum Test auf Kausation

Aufstellen einer Hypothese:

Beispiel: Wenn in einem Dorf viele Störche leben dann ist Zahl der Geburten hoch.

Unabhängige Variable	Vermutete **Ursache**	Anzahl der Storchnester.
Abhängige Variable	Vermutete **Wirkung**	Anzahl der Geburten.

Kontrollierte Studie (mit zufällig ausgewählter Gruppe und Kontrollgruppe)

Gruppe:	Dörfer, in denen ich durch *Intervention die Ursache*, also die Anzahl der Storchennester erhöhe (oder erniedrige)
Kontrollgruppe:	Dörfer, in denen ich keine Intervention setze.

Statistischen Test machen:

- Erzeugte eine randomisierte Intervention in der unabhängigen Variablen
- eine Korrelation in der abhängigen Variablen?
- Wenn ja, dann besteht ein kausaler Zusammenhang von der Ursache zur Wirkung.

Korrelation und Kausation

Korrelation: Zwei Phänomene treten häufiger gemeinsam auf, als durch den Zufall alleine erklärbar wäre.

Kausation: Ein Phänomen verursacht ein anderes Phänomen.

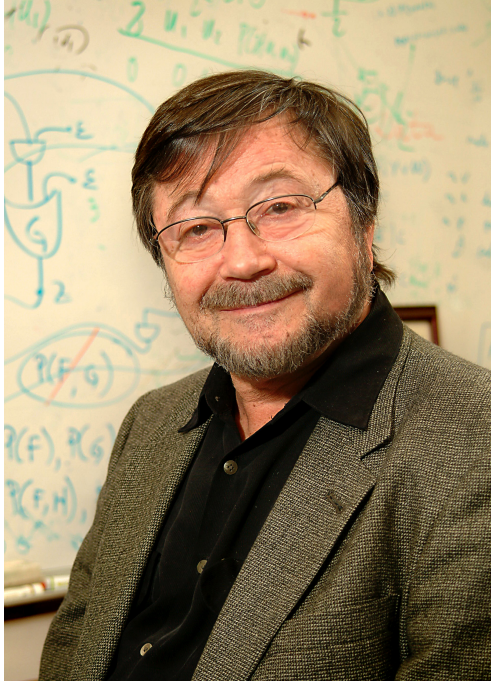
Korrelation: Wird durch statistische Analyse bestimmt.

Kausation: Wird von Korrelation durch Interventions-Experiment unterschieden.

Idee: Wenn ich die Ursache durch eine Intervention verändere, dann ist eine Veränderung in der Wirkung beobachtbar.

Auch: Kausation ist Korrelation einer Wirkung mit einer Intervention in der Ursache.

Abb. 7: Judea Pearl, (geb. 1936), Informatiker und Philosoph, ist Turing Preisträger und Erfinder einer mathematisch fundierten Theorie der Kausalität. Rechte s. Anhang.



Kritik and Kausation

Kritik:

- Kausation unterstellt einen **freien Willen des Experimentators**.
- Es ist umstritten, ob es Kausation, also Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge in der Natur überhaupt gibt, oder ob es nur eine Eigenschaft unseres Gehirns ist, einen solchen Zusammenhang zu erwarten.
- Auch die Existenz eines freien Willens ist umstritten.
- Es gibt physikalische Modelle, die das Fehlen eines Ursache-Wirkungs-Zusammenhangs in der Natur nahelegen.

Nicht jeder findet diese Themen wichtig.

Nicht jeder findet diese Themen interessant.

Beispiel: Der Regenmacher

Beobachtung: Die folgenden 2 Phänomene treten gemeinsam auf:

1. "mein Hausdach ist naß" –und–
2. "es regnet"

Frage: Ist das Korrelation oder Kausation?
Bewirkt ein nasses Hausdach, daß es regnet?

Experiment: Intervention: Ich steige auf das Dach und mache es naß.
Kontrollgruppe: An manchen, zufälligen Tagen tue ich das nicht.

Auswertung: Wenn das Gießen meines Hausdachs die Wahrscheinlichkeit von Regen nicht erhöht, dann kann man die Frage verneinen.

Natürlich kann man auch die andere Richtung der Kausalität untersuchen.
Dabei stellt sich das parktische Problem: Wie bewirke ich "es regnet"?

Beispiel: Klimawandel

Wir beobachten:

1. Ansteigen der Jahresdurchschnittstemperatur.
2. Zunehmender menschlicher CO_2 Ausstoß.

Aus dieser Beobachtung allein auf menschlich bedingten Klimawandel zu schließen ist wissenschaftlich ein Fehlschluß.

Aber: Es kann eine Vielzahl von anderen Gründen und Wirkzusammenhängen geben.

Daraus, daß **eine Schlußfolgerung** falsch ist, kann man nicht schließen, ob die betrachtete Aussage selber wahr oder falsch ist.

Und: Kritik an einer Methodik sollte man getrennt betrachten von Kritik an Ergebnissen und von Kritik an gesellschaftlichen Entscheidungen.

Und: Kritik hat in den Wissenschaften keine positive oder negative Konnotation sondern ist das notwendige, unverzichtbare Hinterfragen aller Methoden und Ergebnisse. Findet ein solches Hinterfragen nicht statt, so findet keine Wissenschaft statt, sondern Ideologie.

Kommunikation, Korrelation und Kausation

Was ist Kommunikation?

Kommunikation ist das Ergebnis eines Ursache-Wirkungs-Zusammenhangs, bei dem ein Phänomen beim Empfänger kausal von einem beim Sender in freier Intervention gesetzten Phänomen auftritt.

Ok. "Informationsübertragung" klingt doch irgendwie einfacher. :-)

Appendix

Übersicht

Übersicht 58

Verzeichnis aller Abbildungen Abb 59

Verzeichnis aller Tabellen Tab 60

Rechtsnachweise © 61

Rechtliche Hinweise § 62

Zitierweise dieses Dokuments → 64

Verzeichnis aller Folien 65

Verzeichnis aller Abbildungen

1 Andrej Kolmogoroff 8
2 Pierre-Simon Laplace 21
3 Claude Shannon 24
4 Gregory Chaitin 39
5 Schaubild zu Kommunikation 45
6 Margarine verursacht Ehescheidungen 50
7 Judea Pearl 53

Verzeichnis aller Tabellen

1 Einheiten für das Maß der Information 32
2 Experiment zur Definition von Kommunikation 47

Rechtsnachweise

Abb. 1 Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andrej_Nikolajewitsch_Kolmogorov.jpg, Konrad Jacobs, CC BY-SA 2.0 DE https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/deed.en

Abb. 2 Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Laplace,_Pierre-Simon,_marquis_de.jpg, James Posselwhite, Public domain

Abb. 3 Quelle: https://www.flickr.com/photos/tekniskamuseet/6832884236, Nutzung nach https://creativecommons.org/licenses/by/2.0/

Abb. 4 Quelle: https://mindmatters.ai/2021/03/gregory-chaitins-almost-meeting-with-kurt-godel/

Abb. 5 Eigene Abbildung

Abb. 6 Screenshot nach Zitatrecht, Quelle siehe Bildunterschrift.

Abb. 7 Bildquelle: http://epiresearch.org/wp-content/uploads/2014/10/jpearl.jpg

Rechtliche Hinweise (1)

Die hier angebotenen Inhalte unterliegen deutschem Urheberrecht. Inhalte Dritter werden unter Nennung der Rechtsgrundlage ihrer Nutzung und der geltenden Lizenzbestimmungen hier angeführt. Auf das Literaturverzeichnis wird verwiesen. Das Zitatrecht in dem für wissenschaftliche Werke üblichen Ausmaß wird beansprucht. Wenn Sie eine Urheberrechtsverletzung erkennen, so bitten wir um Hinweis an den auf der Titelseite genannten Autor und werden entsprechende Inhalte sofort entfernen oder fehlende Rechtsnennungen nachholen. Bei Produkt- und Firmennamen können Markenrechte Dritter bestehen. Verweise und Verlinkungen wurden zum Zeitpunkt des Setzens der Verweise überprüft; sie dienen der Information des Lesers. Der Autor macht sich die Inhalte, auch in der Form, wie sie zum Zeitpunkt des Setzens des Verweises vorlagen, nicht zu eigen und kann diese nicht laufend auf Veränderungen überprüfen.

Alle sonstigen, hier nicht angeführten Inhalte unterliegen dem Copyright des Autors, Prof. Dr. Clemens Cap, ©2020. Wenn Sie diese Inhalte nützlich finden, können Sie darauf verlinken oder sie zitieren. Jede weitere Verbreitung, Speicherung, Vervielfältigung oder sonstige Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechts bedarf der schriftlichen Zustimmung des Rechteinhabers. Dieses dient der Sicherung der Aktualität der Inhalte und soll dem Autor auch die Einhaltung urheberrechtlicher Einschränkungen wie beispielsweise Par 60a UrhG ermöglichen.

Die Bereitstellung der Inhalte erfolgt hier zur persönlichen Information des Lesers. Eine Haftung für mittelbare oder unmittelbare Schäden wird im maximal rechtlich zulässigen Ausmaß ausgeschlossen, mit Ausnahme von Vorsatz und grober Fahrlässigkeit. Eine Garantie für den Fortbestand dieses Informationsangebots wird nicht gegeben.

Die Anfertigung einer persönlichen Sicherungskopie für die private, nicht gewerbliche und nicht öffentliche Nutzung ist zulässig, sofern sie nicht von einer offensichtlich rechtswidrig hergestellten oder zugänglich gemachten Vorlage stammt.

Use of Logos and Trademark Symbols: The logos and trademark symbols used here are the property of their respective owners. The YouTube logo is used according to brand request 2-9753000030769 granted on November 30, 2020. The GitHub logo is property of GitHub Inc. and is used in accordance to the GitHub logo usage conditions `https://github.com/logos` to link to a GitHub account. The Tweedback logo is property of Tweedback GmbH and here is used in accordance to a cooperation contract.

Rechtliche Hinweise (2)

Disclaimer: Die sich immer wieder ändernde Rechtslage für digitale Urheberrechte erzeugt ein nicht unerhebliches Risiko bei der Einbindung von Materialien, deren Status nicht oder nur mit unverhältnismäßig hohem Aufwand abzuklären ist. Ebenso kann den Rechteinhabern nicht auf sinnvolle oder einfache Weise ein Honorar zukommen, obwohl deren Leistungen genutzt werden.

Daher binde ich gelegentlich Inhalte nur als Link und nicht durch Framing ein. Lt EuGH Urteil 13.02.2014, C-466/12 (Pressemitteilung, Blog-Beitrag, Urteilstext). ist das unbedenklich, da die benutzten Links ohne Umgehung technischer Sperren auf im Internet frei verfügbare Inhalte verweisen.

Wenn Sie diese Rechtslage stört, dann setzen Sie sich für eine Modernisierung des völlig veralteten Vergütungs- und Anreizsystems für urheberrechtliche Leistungen ein. Bis dahin klicken Sie bitte auf die angegebenen Links und denken Sie darüber nach, warum wir keine für das digitale Zeitalter sinnvoll angepaßte Vergütungs- und Anreizsysteme digital erbrachter Leistungen haben.

Zu Risiken und Nebenwirkungen fragen Sie Ihren Rechtsanwalt oder Gesetzgeber.

Weitere Hinweise finden Sie im Netz hier und hier oder hier.

Zitierweise dieses Dokuments

Wenn Sie Inhalte aus diesem Werk nutzen oder darauf verweisen wollen,
zitieren Sie es bitte wie folgt:

Clemens H. Cap: Information (1). Electronic document, 22. 11. 2026 https://iuk.one/RNDS-INFO-1.pdf

Bibtex Information: https://iuk.one/RNDS-INFO-1.bib

```
@misc{doc:RNDS-INFO-1,
    author       = {Clemens H. Cap},
    title        = {Information (1)},
    year         = {2026},
    month        = {11},
    howpublished = {Electronic document},
    url          = {https://iuk.one/RNDS-INFO-1.pdf }
}
```

Typographic Information:
Typeset on 2026-11-22 at 20:45
This is pdfTeX, Version 3.141592653-2.6-1.40.29 (TeX Live 2026) kpathsea version 6.4.2
This is pgf in version 3.1.11a
This is preamble-slides.tex ©C.H.Cap
Jobtype flag=foreground
Active modes (if any): slides, biblio
Keywords: keywords
Subject: subject

Verzeichnis aller Folien

Titelseite . . . 1
Ziele . . . 2
Information . . . 3
Inhaltsübersicht . . . 4

1. Wahrscheinlichkeit . . . 5

1.1. Grundlagen

Wahrscheinlichkeit . . . 6
Beispiele für Wahrscheinlichkeits-Experimente . . . 7
Kolmogoroff . . . 8
4 Axiome von Kolmogoroff (sprachlich) . . . 9
4 Axiome von Kolmogoroff (formeltechnisch) . . . 10
Beispiele: 4. Axiom von Kolmogoroff (1) . . . 11
Beispiele: 4. Axiom von Kolmogoroff (2) . . . 12
Bedeutung des 4. Axioms von Kolmogoroff . . . 13

1.2. Würfelexperimente

Beschreibung eines Experiments . . . 14
1. Lösung . . . 15
2. Lösung . . . 16
3. Lösung . . . 17
Analyse und Experiment . . . 18

1.3. Laplacesches Indifferenzprinzip

Zusätzliche Annahme . . . 19
Laplacesches Indifferenzprinzip . . . 20
Pierre-Simon Laplace . . . 21

2. Information (nach Shannon) . . . 22

Motivation . . . 23
Claude Shannon . . . 24
1. Axiom der Informationstheorie . . . 25
Unabhängigkeit: Motivation (1) . . . 26
Unabhängigkeit: Motivation (2) . . . 27
Unabhängigkeit: Motivation (3) . . . 28
Unabhängigkeit: Definition . . . 29
2. Axiom der Informationstheorie . . . 30
3. und 4. Axiom der Informationstheorie . . . 31
Formel für die Information . . . 32
Genauere Analyse des 3. und 4. Axioms . . . 33
Beispiel: Informationsgehalt gezogener Kugel . . . 34
Bits und Bit: Codierung und Informationsgehalt . . . 35

3. Information (nach Chaitin) . . . 36

Motivation . . . 37
Nutzanwendung . . . 38
Gregory Chaitin . . . 39
Roulette . . . 40
Umfrage: Roulette . . . 41
Umfrage: Informationsgehalt nach Chaitin . . . 42
Umfrage: Informationsgehalt nach Shannon . . . 43

4. Kommunikation 44
Was ist Kommunikation? 45
Kritik der Definition 46
Versuch: Erklärung als Korrelation 47
Kritik des Versuchs 48
Zwei logische Irrtümer 49
Spurious Correlations 50
Richtige Vorgehensweise zum Test auf Kausation 51
Korrelation und Kausation 52
Judea Pearl 53
Kritik and Kausation 54
Beispiel: Der Regenmacher 55
Beispiel: Klimawandel 56

Legende:
Fortsetzungsseite
Seite ohne Überschrift
Bildseite