

Kommunikation durch Signale



<https://iuk.one/1010-1008>

Clemens H. Cap

ORCID: 0000-0003-3958-6136

Department of Computer Science
University of **Rostock**
Rostock, Germany
clemens.cap@uni-rostock.de

21. 11. 2020 Vers. 4



Kommunikation entsteht durch Signale in Raum und Zeit:

- ① **Sender** stellt Information als physikalischen Zustand im Raum-Zeit-Gefüge dar.
- ② **Kanal** transportiert diesen Zustands innerhalb des Raum-Zeit-Gefüges.
- ③ **Empfänger** interpretiert den Zustand wieder als Information.

Wir wollen verstehen, wie die Mathematik Signale in Raum und Zeit **analysiert**.

Wir wollen verstehen, wie die Informatik diese Erkenntnisse **nutzen** kann.

1. Fourier Analyse
2. Nyquist-Theorem
3. Störungen
4. Shannon-Theorem

1. Fourier Analyse

1.1. Grundidee

1.2. Rechteck-Funktion

1.3. Audacity

1.4. Mathematica

1.5. Fazit

1.6. Anwendung

Die **Fourier-Analyse** erlaubt viele wichtige Aussagen über periodische Signale.

1. Fourier Analyse

2. Nyquist-Theorem

3. Störungen

4. Shannon-Theorem

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **periodisch** mit der **Periodendauer** T (oder: mit der Frequenz $\nu = \frac{1}{T}$), wenn gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x + T)$$

Jede periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit *hinreichend normalem Verhalten* kann als gewichtete Summe der konstanten 1-Funktion und der periodischen Grundfunktionen Sinus und Cosinus *approximiert* werden, deren Periode ein ganzzahliger Bruchteil der Periodendauer von f ist. (deren Frequenz also ein ganzzahliges Vielfaches der Frequenz von f ist).

Periodische Funktionen sind im wesentlichen **Summen von Sinus und Cosinus**.

Was hinreichend normales Verhalten und *approximiert* genau bedeutet, ist Gegenstand der sogenannten harmonischen Analysis in der Mathematik. Typischerweise geht es um Stetigkeit, Differenzierbarkeit, stückweise Stetigkeit usw.

Darstellung der Funktion als Fourier-Reihe:

$$f(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt$$

$$c = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Periodische Rechteck-Funktion

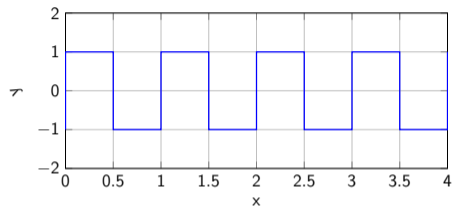


Abb. 1: Rechteckfunktion der Periode $T = 1$ [s], der Frequenz $\nu = 1$ [Hz] und der Kreisfrequenz $\omega = 2 \cdot \pi$ [rad/s].

- Achtung:** Die Rechteck"funktion", wie sie hier gezeichnet wurde, ist eigentlich gar keine Funktion.
- Denn:** Welchen Wert hat sie bei $x = 1$?
- Hier:** Idealisiertes Bild eines "unendlich schnellen" Anstiegs.
- Mathematik:** Löst das: Wert 0, stückweise Stetigkeit, L^2 Funktionenraum.
- Ingenieure:** Überlassen das Problem großzügig der Mathematik.

Approximation der Rechteck-Funktion (1)

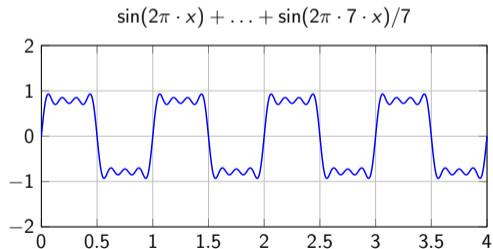
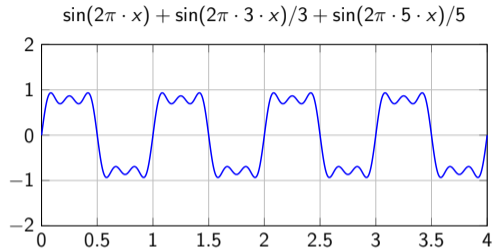
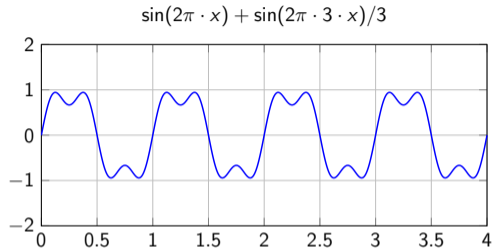
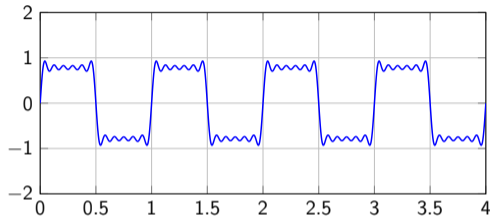


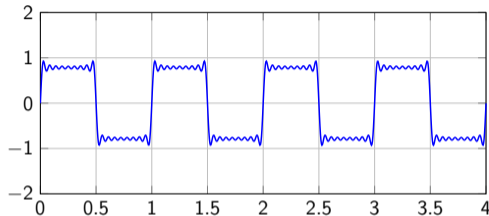
Abb. 2: Approximation der Rechteck-Funktion durch ihre Fourier-Reihe.

Approximation der Rechteck-Funktion (2)

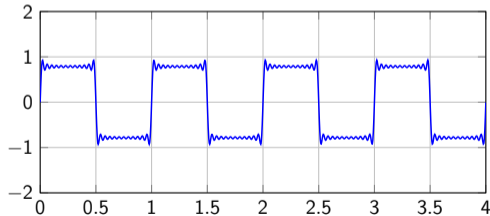
$$\sin(2\pi \cdot x) + \dots + \sin(2\pi \cdot 11 \cdot x)/11$$



$$\sin(2\pi \cdot x) + \dots + \sin(2\pi \cdot 17 \cdot x)/17$$



$$\sin(2\pi \cdot x) + \dots + \sin(2\pi \cdot 23 \cdot x)/23$$



Immer bessere Annäherung
an die Rechteckfunktion.

Überschwingen nach dem Anstieg:
Sog. **Gibbsches Phänomen**.

Mit höheren Frequenzen immer besseres
Nachempfinden des **steilen Anstiegs**.

Abb. 3: Approximation der Rechteck-Funktion durch ihre Fourier-Reihe.

Beispiel: Rechteck-Schwingung mit Audacity (1)

- 1 Generieren einer Rechteck-Schwingung mit 100 [Hz] auf Audacity.
- 2 Anzeige des Spektrums.
- 3 Abgleich mit unserer Theorie.

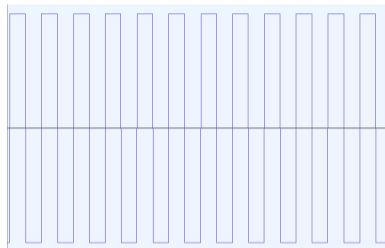


Abb. 4: Rechteck-Schwingung auf Audacity.

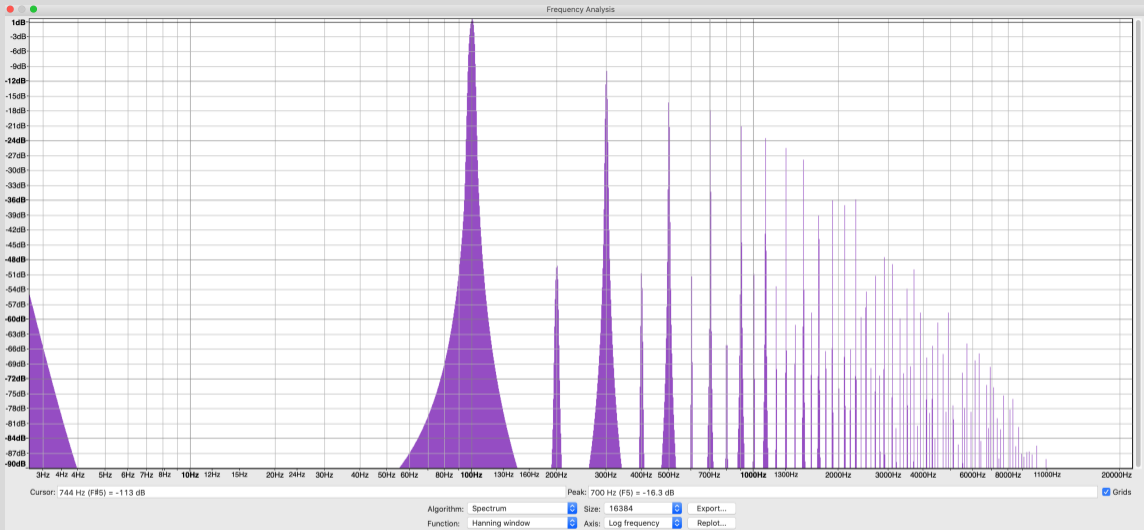


Abb. 5: Ergebnis des Spektralanalyse bei Audacity. **Problem:** Sie sieht **gänzlich anders** aus, als wir es aufgrund der Theorie erwartet hätten.

Peaks bei 100 [Hz], 300 [Hz], 500 [Hz], 700 [Hz].

Wie von der Theorie vorhergesagt.

Aber auch einige Theorie-widrige Beobachtungen:

- 1 Frequenz-Bänder **größerer Breite** statt einzelner, punktueller Peaks.
Bsp: Von 60 [Hz] bis 150 [Hz]
- 2 Weitere, **unerwartete** Peaks
Bsp: 200 [Hz], 400 [Hz], 600 [Hz]
- 3 Frequenz-Bänder **auch unterhalb** der erzeugten Frequenz.
Bsp: Frequenzband bei 0 - 4[Hz]

Wichtig: Bei kognitiver Dissonanz ist in der Wissenschaft stets eine genauere Analyse zur Abklärung der Ursachen erforderlich!

Gründe: Eine Vielzahl methodischer und interpretativer Fehler.

- **Interpretationsfehler:**

Vorhandene Anteile sind schwächer, als sie uns zunächst erscheinen, da y-Achse eine Dezibel-Skalierung aufweist, also logarithmisch ist.

- **Endlicher Bereich:**

Statt periodischer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

wurde nur endlicher Wellenzug von wenigen Sekunden Dauer betrachtet.

- **Auswahl diskreter Werte:**

Die Funktion wird im Rechner nur für einige ausgewählte Werte dargestellt.

- **Berechnung des Spektrums:**

Erfolgt aus Gründen des Rechenaufwands nur auf ausgewählten Datenpunkten.

Gründe (2)

- **Rundungsfehler:**

In jedem Rechenverfahren auf reellen Zahlen passieren Fehler.

- **Sampling Fenster:**

Um die genannten Effekte gering zu halten, nutzt man sogenannte Sampling Fenster. Das Sampling Fenster selber erzeugt aber wiederum Artefakte.

Fazit: Das in Audacity implementierte Verfahren heißt im Menüpunkt zwar "Plot Spektrum" macht aber im Detail etwas anderes als die Darstellung der Frequenzanteile einer periodischen Funktion.

Anwendungsbereich: Die Funktion auf Audacity ist für zeitlich variable, mit einem Mikrofon aufgenommene Tonsignale endlicher Dauer gedacht.

Variables Spektrum: Das Spektrum bei Audacity ändert sich. Es geht also um das zeitlich lokale Spektrum innerhalb eines kurzen Zeitintervalls. Das Spektrum bei der Fourier-Reihe hat gänzlich andere Sichtweise.

```
Plot[SquareWave[x], {x, -3, 3}]
```

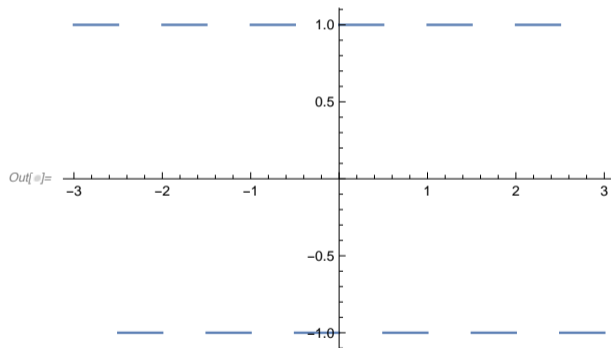


Abb. 6: Mathematica plottet die Rechteckfunktion sehr zutreffend.

`Fct[x_] = FourierSinSeries[SquareWave[x], x, 35, FourierParameters -> {1, 2Pi}]`

$$\begin{aligned} & \frac{4\sin[2\pi x]}{\pi} + \frac{4\sin[6\pi x]}{3\pi} + \frac{4\sin[10\pi x]}{5\pi} + \frac{4\sin[14\pi x]}{7\pi} + \frac{4\sin[18\pi x]}{9\pi} + \frac{4\sin[22\pi x]}{11\pi} + \frac{4\sin[26\pi x]}{13\pi} + \\ & \frac{4\sin[30\pi x]}{15\pi} + \frac{4\sin[34\pi x]}{17\pi} + \frac{4\sin[38\pi x]}{19\pi} + \frac{4\sin[42\pi x]}{21\pi} + \frac{4\sin[46\pi x]}{23\pi} + \frac{4\sin[50\pi x]}{25\pi} + \frac{4\sin[54\pi x]}{27\pi} + \\ & \frac{4\sin[58\pi x]}{29\pi} + \frac{4\sin[62\pi x]}{31\pi} + \frac{4\sin[66\pi x]}{33\pi} + \frac{4\sin[70\pi x]}{35\pi} \end{aligned}$$

`Plot[Fct[x], {x, 0, 2}]`

Abb. 7: Mathematica kann die Integrale auch symbolisch auswerten. Im nächsten Bild sehen wir nun den Plot dieser Reihe.

1.4 Mathematica

Fourier-Reihe

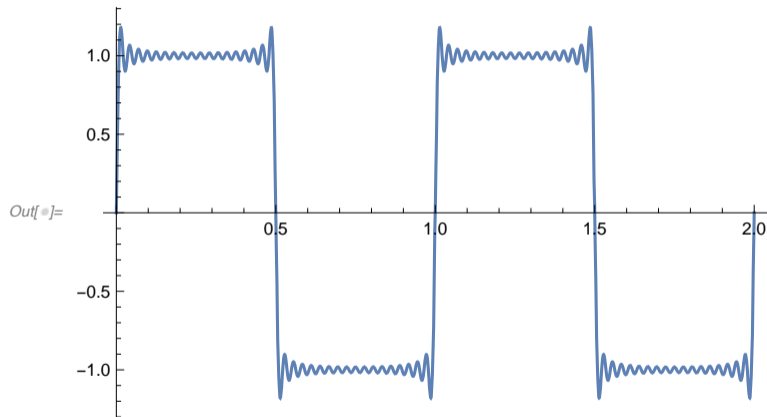


Abb. 8: Mathematica plottet die Fourier-Reihe bis zum Koeffizienten $n = 35$.

Zuerst: Eigene Tikz-Plots in \LaTeX nach individueller Berechnung.

Dann: Audacity. War weniger geeignet.

Dann: Mathematica-Notebook nach Konvertierung nach \LaTeX .

Leitsatz zu Computer-gestützter Auswertung

Vor der Anwendung eines Computer-gestützten Analyse-Verfahrens muß man

- 1 die theoretischen Details des Verfahrens kennen,
- 2 die rechentechnische Umsetzung verstehen,
- 3 die möglichen Fehlerquellen kennen,
- 4 das Verfahren an Fällen testen, deren Ergebnisse man aus der Theorie kennt und
- 5 das Verhalten in möglicherweise problematischen Extremfällen untersuchen.

Warnung

Das **Unterlassen** eines dieser Schritte, also die "blinde" Nutzung eines Analyse-Verfahrens ist ein **grober systematischer Fehler im wissenschaftlichen Arbeiten** (der im Zeitalter der Digitalisierung leider immer häufiger vorkommt).

1.6 Anwendung

Opennet-Initiative

Verein zur Förderung offener Wlan-Netze.

Anfang 2005 auf Initiative des Lehrstuhls luK gegründet.

Verbund von Wlan-Knoten, primär in der KTV.

Mehr Informationen <https://opennet-initiative.de/>.

Diverse Forschungsarbeiten zur Link-Qualität.

Frage: Wie ändert sich Link-Qualität im Zeitverlauf.

Karte/Opennet Gesamt

Karte in Vollbild

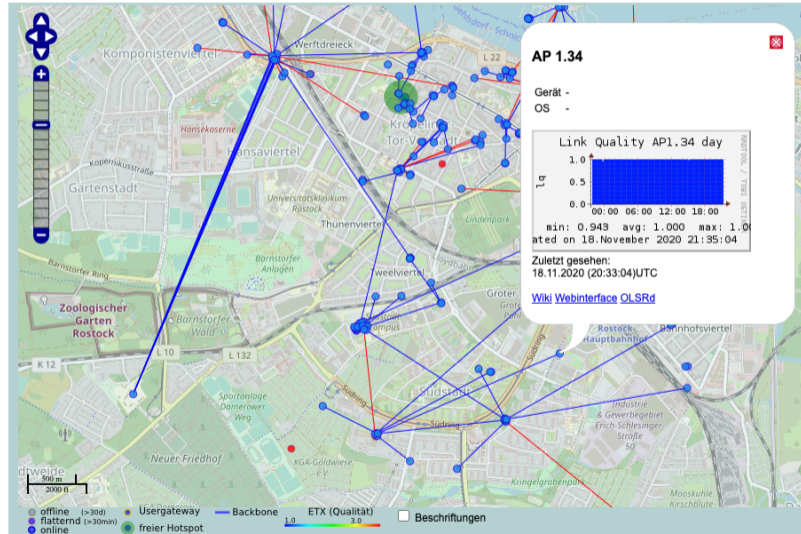


Abb. 9: Netzmonitor der Opennet Initiative Rostock als Screenshot.

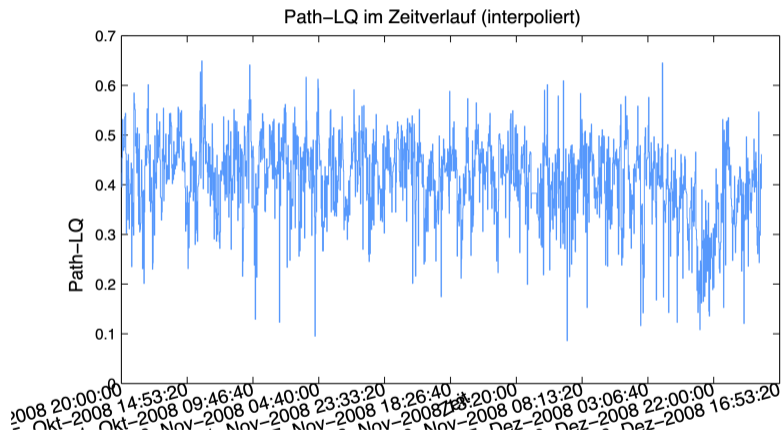


Abb. 10: Path-LQ Signal im Zeitverlauf. Quelle: Diplomarbeit Till Wollenberg: Untersuchungen zur Vorhersagbarkeit von Interferenzen in einem Mesh-Netzwerk, Universität Rostock, 2010. ©

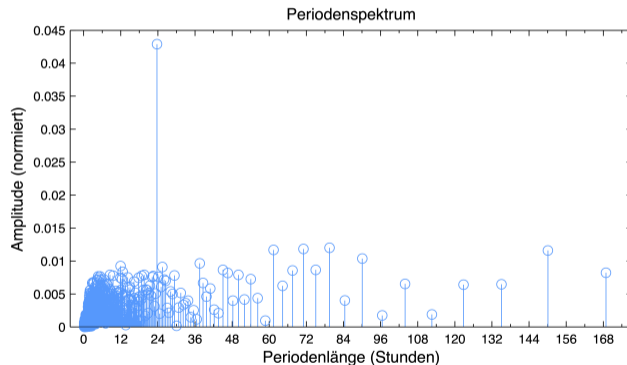


Abb. 11: Die Fourier-Transformierte des vorangegangenen Bildes weist einen prominenten Frequenzanteil bei $T = 24$ [h] auf, der bei Verständnis der menschlichen Lebensweise leicht zu interpretieren ist. Quelle: Ders. ©

2. Nyquist-Theorem

2.1. Mechanismen des Abtast-Theorems

2.2. Anwendungen des Abtast-Theorems

Mit dem **Nyquist-Theorem** bestimmen wir die Abtastrate, die zur Rekonstruktion eines Signals erforderlich ist.

1. Fourier Analyse

2. **Nyquist-Theorem**

3. Störungen

4. Shannon-Theorem

Nyquist-Theorem

Soll ein Signal, das maximal die Frequenz ν im Spektrum enthält, exakt rekonstruiert werden, so muß es mit der **doppelten Frequenz 2ν** abgetastet werden.

Was bedeutet abtasten?

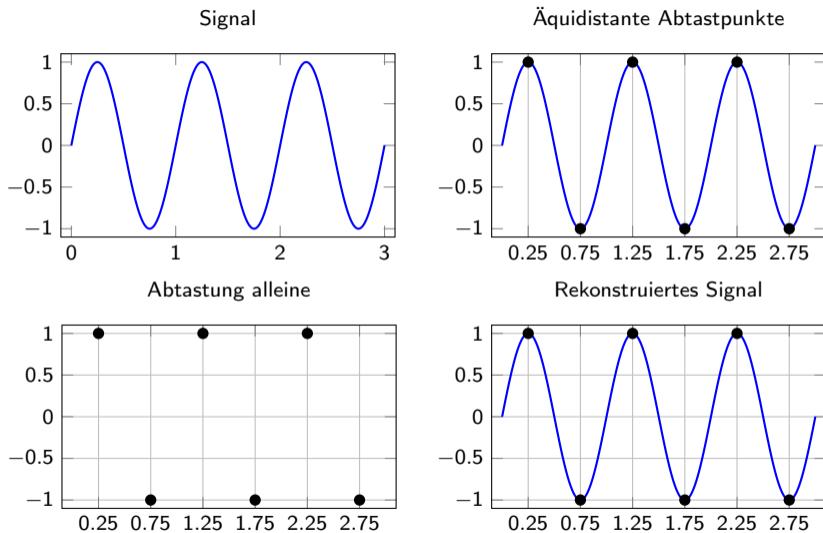


Abb. 12: Abtastung eines Signals

Höherfrequente und niederfrequente Rekonstruktion

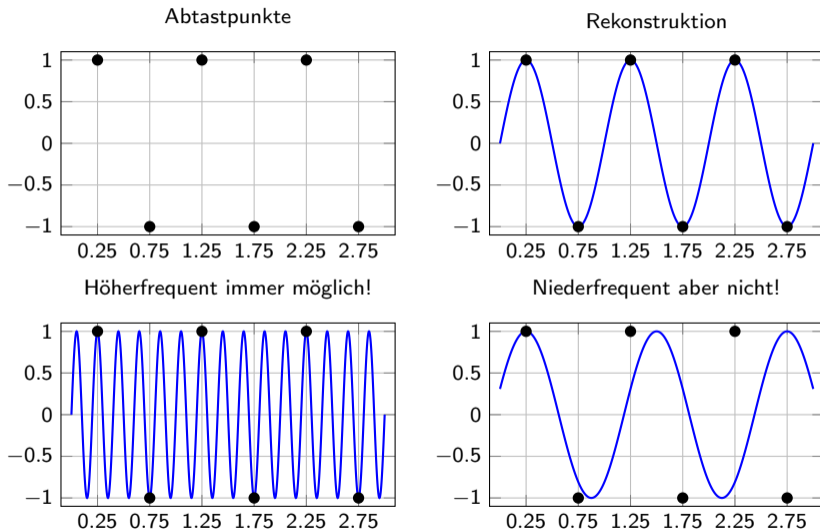
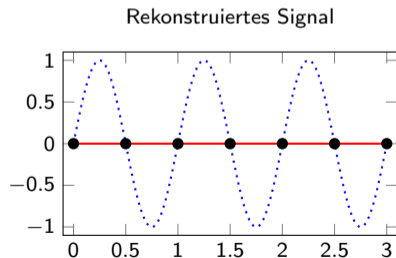
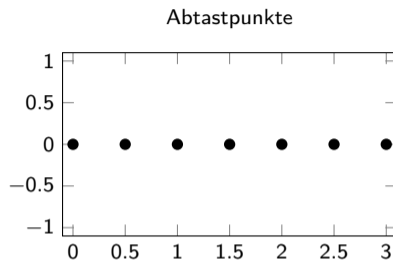
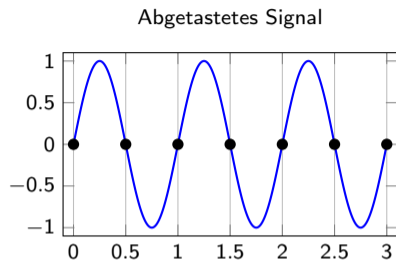


Abb. 13: Interpolation durch höhere Frequenzen ist immer möglich, durch niedrigere Frequenzen aber nicht.

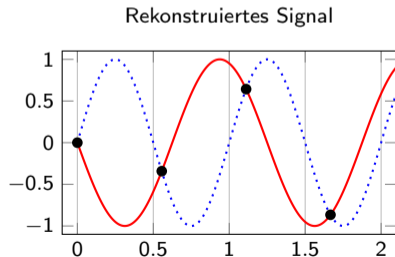
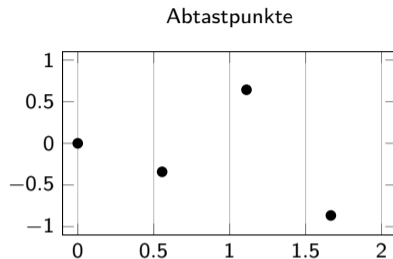
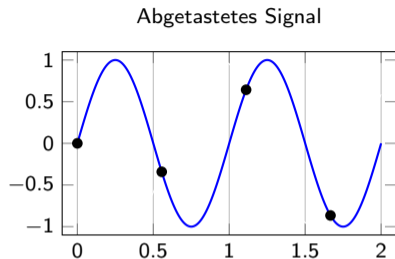
Falsch-lagige Abtastung



Falsch-lagige Abtastung

- ist ein **Sonderfall**, in dem auch die **konstante Funktion** möglich ist.
- muß in **Theorie** für den Beweis in den Voraussetzungen **ausgeschlossen** werden.
- wird in **Praxis kaum auftreten**, da immer kleine Abweichungen vorhanden.

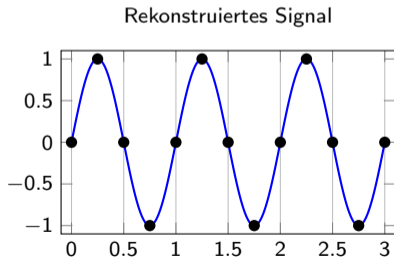
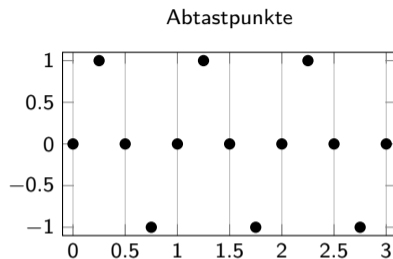
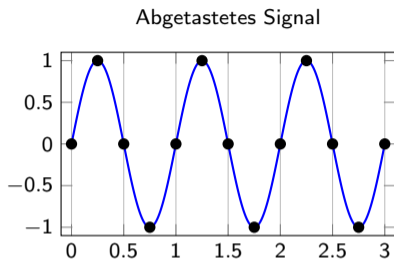
Abb. 14: Falsch-lagige Abtastung.



Unterabtastung

- bedeutet Abtastung mit geringerer Frequenz als nach Nyquist erforderlich.
- Abtastung kommt "später".
- Erlaubt Rekonstruktion **falscher Signale** (falscher, höherer & niedriger Frequenzen) (sog. Alias-Frequenzen).

Abb. 15: Unterabtastung.



● **Überabtastung** mit einer höheren Frequenz ist unkritisch.

Abb. 16: Überabtastung.

Komplexere periodische Signale

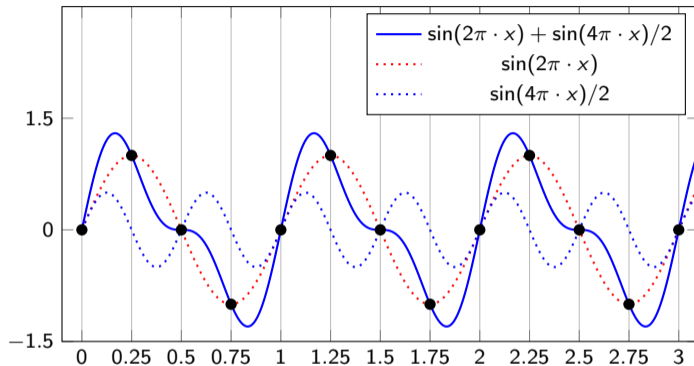


Abb. 17: Das Konzept funktioniert auch für Signale, die periodisch sind, aber nicht "strenge" Sinus- oder Cosinus-Form haben – so lange die Abtastfrequenz hoch genug ist. Das ist der **wesentliche Punkt des Theorems**, den wir aber in den vorangegangenen Beispielen zunächst nicht herausgearbeitet haben. Die Möglichkeiten und Unmöglichkeiten trigonometrischer Interpolation wird von unserem Gehirn bei komplexeren Signalen nicht mehr so leicht erkannt. Hier ist das Signal Summe der beiden punktierten Teilsignale. Die Abtastung erfolgt hier also genau mit der Nyquist-Frequenz als dem doppelten der vertretenen maximalen Teilfrequenz.

Anwendung: Telefonie

Aufgabe: Bestimme die Datenrate, die für Telefonie erforderlich ist.

Bekannt ist:

- Der Mensch hört im Bereich 20 [Hz] – 20 [kHz].
- Gutes Sprachverständnis erfordert typischerweise den Bereich bis 4 [kHz].

Nach Nyquist: Erforderliche Abtastfrequenz: 8 [kHz].

Entscheidung: Schalldruck mit 8 [bit] auflösen.

Antwort: Die erforderliche Datenrate beträgt 64 [kbit/s].

Beachte: ISDN hat pro Kanal 64 [kbit/s].

Komprimierung durch Audio-Codecs

Beobachtung: Messungen im Labor mit Versuchspersonen

- Mithörschwelle: Menschliches Ohr kann eng nebeneinander liegenden Frequenzen bei ähnlicher Lautstärke nicht mehr unterscheiden.
- Sog. **psychoakustisches Modell** kennt weitere Effekt.

Schlußfolgerung:

- Toninformation, die nicht gehört werden kann, muß man nicht übertragen.
- Damit kann man die erforderliche Datenrate reduzieren.

Technische Umsetzung:

- VoIP geht auch mit geringeren Datenraten als bei ISDN verfügbar.
- Musik-Speicherung im MP3 Format braucht weniger Speicherplatz als das WAV Format, das die Psychoakustik nicht nutzt.

2.2 Anwendungen des Abtast-Theorems

Bedeutung des Abtast-Theorems

Exemplarische Betrachtung mathematisch-physikalischer Mechanismen der Kommunikation.

Erkennen der Bedeutung der Frequenz als Modus der Kommunikation.

Abschätzung von Datenraten, die für Signalübertragung erforderlich sind.

3. Störungen

Störungen erklären, warum ein physikalischer Zustand unter Umständen ganz anders ankommt, als er abgesendet wurde. Störungen können die übertragene Information verändern.

1. Fourier Analyse
2. Nyquist-Theorem
3. **Störungen**
4. Shannon-Theorem

5 wichtige Störungen

- 1 Dämpfung
- 2 Rauschen
- 3 Einstreuung
- 4 Bandlimitierung
- 5 Verzerrung

3. Störungen

Dämpfung

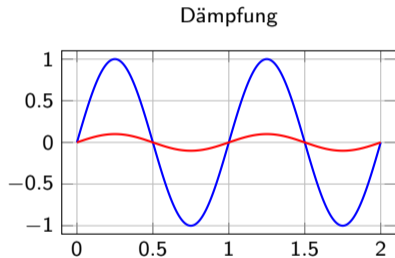


Abb. 18: Durch Dämpfung entsteht aus dem blauen Signal das rote Signal.

Dämpfung bedeutet **Abschwächung** des Signals.

Sie entsteht durch Widerstände, meist durch zu lange Leitungen.

Dämpfung wird meist auf der sog. Dezibel-Skala ausgedrückt.

Dezibel-Skala: Motivation

Die Einheit **Dezibel** bedeutet, daß ein **Verhältnis angegeben** wird zu einer nicht näher angegebenen, implizit klaren Grundgröße.

Lineares System: Wenn aus dem Eingang x der Ausgang y wird dann wird aus dem Eingang kx der Ausgang ky .

Lineare Systeme realisieren ein festes Verhältnis λ von Eingang zu Ausgang für jeden Eingang – Grundgröße muß gar nicht mehr festgelegt werden.

Nachteil:

- Absolute Werte werden recht groß.
- Fokus auf die "Größenordnung" (meint meist 10-er Exponent) mißlingt.
- Hintereinandergeschaltete Systeme erfordern Multiplikation

Dezibel-Skala: Definition

Idee: Verwende statt Faktor den Logarithmus des Faktors
Hier: \log_{10}

Einheit: [bel] (zu Ehren von Alexander Graham Bell)

Gebräuchlich ist die dezi- Form davon: Das [dB] oder Dezi-Bel.

Beim natürlichen Logarithmus nennt sich die Einheit [Np] oder Neper (sic!) nach John Napier.

Dezibel-Skala: Häufig auftretende Werte

	Dezibel	Verhältnis
	30 [dB]	1000
	20 [dB]	100
	10 [dB]	10
	3 [dB]	2
	1 [dB]	1.26
	0 [dB]	1
	-10 [dB]	0.1
	-20 [dB]	0.01
	-30 [dB]	0.001

Tab. 1: Häufig auftretende Werte der Dezibel-Skala.

Das **Vorzeichen** der Dezibel-Skala hängt davon ab, ob man eine Verstärkung oder eine Dämpfung betrachtet.

Beachte: Dämpfung um Faktor 2 ist "Verstärkung" um Faktor 0.5.

Leistungsdämpfung und Spannungsdämpfung

Situation: Übertragung eines elektrischen Signals: Leistung fällt von P_1 auf P_2 .

Dämpfung ist $a = 10 \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$ [dB].

Alternativ: Berechnung aus der Spannung.

Es ist $P = U \cdot I$ (Definition) und $I \cdot R = U$ (Ohmsches Gesetz)

Also: $I = \frac{U}{R}$ und $P = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$

Somit:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\left(\frac{U_1^2}{R} \right)}{\left(\frac{U_2^2}{R} \right)} = \frac{U_1^2}{U_2^2} \quad \text{und} \quad \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = \log_{10} \left(\left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 \right) = 2 \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right)$$

Dämpfung ist $a = 20 \log_{10} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$ [dB]

Dämpfung kann über die *Leistung* oder über die *Spannung* berechnet werden. Die Formeln unterscheiden sich um einen Faktor 2, sind aber zueinander konsistent.

Thermisches Rauschen:

Die Wärmebewegung der Elektronen bewirkt Ladungsverschiebungen.

Diese bewirken elektrische Störungen.

Mathematisch präzisere Beschreibung als Zufallsprozeß möglich.

Beschreibung:

Grobe Charakterisierung typischerweise durch Angabe der Leistung in den jeweils beteiligten Frequenzen des Störsignals.

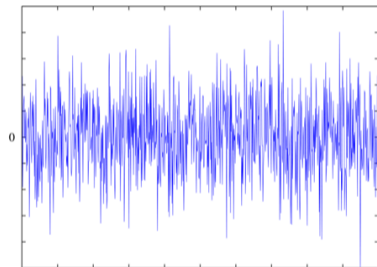


Abb. 19: Typisches Rausch-Signal.

2 Modelle des Rauschens

Weißes Rauschen: Analogie zu weißem Licht: Alle Farben gleich stark vertreten.

Formal: Jede Frequenz trägt gleich stark zur Rauschleistung bei.

Aber: Es gibt unendlich viele Frequenzen – unendlich viel Rauschen

Besser: Jedes Intervall trägt gleich viel zur Rauschleistung bei.

Beispiel: [20, 40] [Hz] ebensoviel wie [10'000, 10'020] [Hz]

Wieder: Es gibt unendlich viele Intervalle – also unendlich viel Rauschen.

Daher: Einführung einer oberen Grenzfrequenz.

Rosa Rauschen: Bestimmte Frequenz(bereiche) stärker vertreten.

Neben dem Rauschen können auch andere Signale von außen einwirken.
Die Abgrenzung zum Rauschen ist fließend.

Nahnebensprechen (sog. Cross Talk).

Störung durch induktive Koppelung an parallel laufende Leitungen.

Netzbrumm: Störung durch induktive Koppelung an 50 [Hz] Wechselstrom.

Impuls Störung: Störung durch Stromstoß beim Anschalten von Geräten.

Bei Eisenbahn und Industriehallen werden hohe Lasten geschaltet.

Kommunikation daher dort über Glasfaser, da diese besser geschützt sind,
denn im (deutlich höheren) Frequenzbereich des Lichts
ist Dämpfung durch Ummantelung viel besser.

3. Störungen

Einstreuung in Form von Spikes

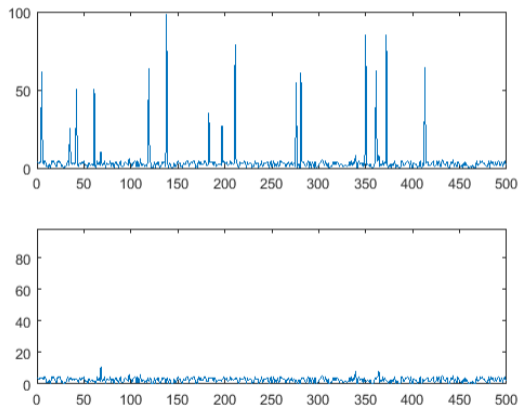


Abb. 20: Typische Spike-Einstreuungen.

Dämpfung ist typischerweise bei höheren Frequenzen stärker.

Ab einer bestimmten Frequenz wird (praktisch) kein Signalanteil mehr übertragen.
Man spricht von der sogenannten **Grenzfrequenz**.

Ein Übertragungssystem erzeugt eine frequenzabhängige Dämpfung. Es wirkt wie ein **Tiefpaß**, da es **tiefe** Frequenzen besser **passieren** läßt.

Die selektive Filterung der hohen Frequenzen verzerrt das Signal.

Bandlimitierung

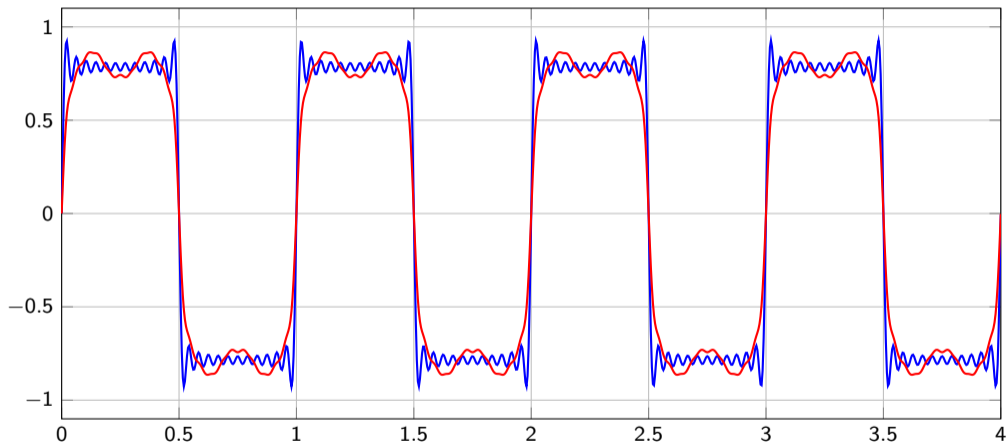


Abb. 21: Simulation einer Bandlimitierung. Einführung mit der Frequenz ansteigender Dämpfungs-Anteile auf dem **blauen Original-Signal** ergibt das **bandlimitierte rote** Signal. Es ergeben sich langsamere Flanken-Anstiege, was die maximal nutzbare Signalrate limitiert. **Daher:** Bandlimitierung begrenzt die Datenrate.

3. Störungen

Verzerrung

Dispersion: Signale **verschiedener Frequenz** breiten sich im Medium **unterschiedlich schnell** aus.

Effekt: **Unterschiedliche** Frequenzanteile erfahren eine **unterschiedliche** zeitliche Verschiebung zueinander.

Beispiel: Der 50 [Hz] Anteil kommt später an als der 100 [Hz] Anteil

Dadurch wird das Signal auf verschieden Arten **verzerrt**.

Beachte: Diese Art der Betrachtung eines Signals als (Fourier-)Summe von Frequenz-Anteilen ist (nur) gerechtfertigt, wenn der betrachtete physikalische Vorgang linearen Gesetzen genügt.

4. Shannon-Theorem

Mit dem **Shannon-Theorem** ermitteln wir die Datenrate eines Kanals bei einer Störung, die sich als weißes Rauschen beschreiben läßt.

1. Fourier Analyse
2. Nyquist-Theorem
3. Störungen
4. **Shannon-Theorem**

4. Shannon-Theorem

Shannon-Theorem

Theorem von Shannon

Ein Kanal mit der **Grenzfrequenz** ν mit Störungen nach dem Modell des **weißen Rauschens**, der ein **Signal / Rausch Verhältnis** (SNR) von $\frac{S}{N}$ hat, kann maximal die Datenrate

$$D = \nu \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ [bit/s]}$$

transportieren.

Die Shannon-Grenze gilt absolut (**wenn** die Voraussetzungen vorliegen).

Genauer: Komprimierung kann **keine** höhere Datenrate ergeben, als die Shannon-Kapazität angibt.

Beispiel: Alte Telefonleitung

Aufgabe: Eine sehr alte Telefonleitung habe eine Grenzfrequenz von 3 [kHz] und ein Signal-Rausch Verhältnis von 30 [dB]. Bestimme die Kanalkapazität nach dem Theorem von Shannon!

Das Signal-Rausch Verhältnis von 30 [db] in ein Verhältnis umrechnen:

$$10 \cdot \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right) = 30[\text{dB}] \quad \text{also} \quad \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right) = 3 \quad \text{also} \quad \frac{S}{N} = 10^3$$

$$\text{Nach Shannon:} \quad D = 3'000 \cdot \log_2(1 + 10^3) \sim 3'000 \cdot 10 [\text{kbit/s}] = 30 [\text{kbit/s}]$$

Da $2^{10} = 1024$ ist $\log_2(1001) \sim 10$. Genauer: $\log_2 1001 = 9.967226258 \dots = 9.967(2)$

Lösung: Die Kanalkapazität beträgt 30 [kbit/s].

4. Shannon-Theorem

Grenzfälle

Grenzfall: $S = 0$ $D = \nu \log_2 1 = 0$

Wenn kein Signal vorhanden ist, kann man auch nichts übertragen.

Grenzfall: $S = N$ $D = \nu \log_2 2 = \nu$

Ist die Rauschleistung gleich der Signalleistung, so kann man "pro Vollschiwingung" ein Bit übertragen.

Grenzfall: $N = 0$ $D = \nu \log_2(1 + \infty) = \infty$

Gibt es überhaupt keine Störung, dann kann man (sogar bei jeder noch so kleinen Grenzfrequenz) unendlich viel Information übertragen.

Das ist korrekt! Ohne Störung könnte man unendlich viele Signalniveaus benutzen.

Asymptotische Abschätzung

Frage: Was bringt eine Verdoppelung der Signalleistung?

Beobachte: Verdoppelung der Signalleistung hat gleiche Wirkung wie Halbierung der Rauschleistung.

$$\nu \log_2 \left(1 + 2 \frac{S}{N} \right) \sim \nu \log_2 \left(2 \cdot \frac{S}{N} \right) =$$

$$\nu \left(\log_2(2) + \log_2 \left(\frac{S}{N} \right) \right) = \nu + \nu \log_2 \left(\frac{S}{N} \right) \sim \nu + \nu \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

Antwort: Es bringt grob eine Zunahme der Datenrate um so viele [bit/s] wie die Grenzfrequenz in [Hz] beträgt.

Grenzen des Shannon-Theorems

Frage: Warum bekommt man über eine alte Telefonleitung deutlich mehr als 30 [kbit/s] durch?

Beispiel: Verschiedene DSL-Technologien bis 50 [Mbit/s] und mehr.

Modellannahmen bei Shannon:

- ① harte obere Grenzfrequenz,
- ② weißes Rauschen, mit Multiband-Technik auszunutzen
- ③ keine weitere Kenntnis der Störungen. mit Vectoring auszunutzen

Antwort: Die Annahmen sind bei DSL nicht erfüllt.
DSL nutzt das aus, mit Multiband-Übertragung und Vectoring.

Wichtig: Man kann die Shannon-Grenze nicht durch Komprimierung schlagen.
Mögliche Gewinne durch Komprimierung sind bei Shannon schon "inbegriffen"

Anhang

Übersicht

Literaturverzeichnis



Verzeichnis aller Abbildungen

Abb

Rechtsnachweise



Rechtliche Hinweise



Zitierweise dieses Dokuments



Index

Index

Verzeichnis aller Folien



Verzeichnis aller Abbildungen

1	Rechteckfunktion	7
2	Fourier-Approximation Rechteck-Funktion	8
3	Fourier-Approximation Rechteck-Funktion	9
4	Rechteck-Schwingung auf Audacity.....	10
5	Spektralanalyse durch Audacity	11
6	Rechteckfunktion in Mathematica	15
7	Fourier-Reihe in Mathematica.....	16
8	Plot der Fourier-Reihe in Mathematica	17
9	Netzmonitor der Opennet Initiative Rostock als Screenshot.	21

10	Path-LQ Signal im Zeitverlauf	22
11	Fourier-Transformation des Path-LQ Signals	23
12	Abtastung eines Signals	26
13	Signal-Rekonstruktion	27
14	Falsch-lagige Abtastung	28
15	Unterabtastung	29
16	Überabtastung	30
17	Das Konzept funktioniert auch für Signale, die periodisch sind, aber nicht "strenge" Sinus- oder Cosinus-Form haben – so lange die Abtastfrequenz hoch genug ist. Das ist der wesentliche Punkt des Theorems , den wir aber in den vorangegangenen Beispielen zunächst nicht herausgearbeitet haben. Die Möglichkeiten und Unmöglichkeiten trigonometrischer Interpolation wird von unserem Gehirn bei komplexeren Signalen nicht mehr so leicht erkannt. Hier ist das Signal Summe der	

beiden punktierten Teilsignale. Die Abtastung erfolgt hier also genau mit der Nyquist-Frequenz als dem doppelten der vertretenen maximalen Teilfrequenz.31

18 Dämpfung eines Signals 37

19 Typisches Rausch-Signal 42

20 Spike Störungen 45

21 Bandlimitierung 47

Verzeichnis aller Tabellen

Abb. 10

Abb. 11

Die hier angebotenen Inhalte unterliegen deutschem Urheberrecht. Inhalte Dritter werden unter Nennung der Rechtsgrundlage ihrer Nutzung hier angeführt. Auf das Literaturverzeichnis wird verwiesen. Das **Zitat**recht in dem für wissenschaftliche Werke üblichen Ausmaß wird beansprucht. Wenn Sie eine Urheberrechtsverletzung erkennen, so bitten wir um Hinweis an den auf der Titelseite genannten Autor und werden entsprechende Inhalte sofort entfernen oder fehlende Rechtsnennungen nachholen. Bei Produkt- und Firmennamen können Markenrechte Dritter bestehen. Verweise und Verlinkungen wurden zum Zeitpunkt des Setzens der Verweise überprüft; sie dienen der Information des Lesers. Der Autor macht sich die Inhalte, auch in der Form, wie sie zum Zeitpunkt des Setzens des Verweises vorlagen, nicht zu eigen und kann diese nicht laufend auf Veränderungen überprüfen.

Alle sonstigen Inhalte unterliegen dem Copyright des Autors, Prof. Dr. Clemens Cap, ©2020.

Wenn Sie diese Inhalte nützlich finden, können Sie darauf verlinken oder sie zitieren. Jede weitere Verbreitung, Speicherung, Vervielfältigung oder sonstige Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechts bedarf der schriftlichen Zustimmung des Rechteinhabers. Dieses dient der Sicherung der Aktualität der Inhalte und soll dem Autor auch die Einhaltung urheberrechtlicher Einschränkungen wie beispielsweise **Par 60a UrhG** ermöglichen.

Die Bereitstellung der Inhalte erfolgt hier zur persönlichen Information des Lesers. Eine Haftung für mittelbare oder unmittelbare Schäden wird im maximal rechtlich zulässigen Ausmaß ausgeschlossen, mit Ausnahme von Vorsatz und grober Fahrlässigkeit. Eine Garantie für den Fortbestand dieses Informationsangebots wird nicht gegeben.

Die Anfertigung einer persönlichen Sicherungskopie für die private, nicht gewerbliche und nicht öffentliche Nutzung ist zulässig, sofern sie nicht von einer offensichtlich rechtswidrig hergestellten oder zugänglich gemachten Vorlage stammt.

Wenn Sie Inhalte aus diesem Werk nutzen oder darauf verweisen wollen, zitieren Sie es bitte wie folgt:

Clemens H. Cap: Kommunikation durch Signale. Electronic document. <https://iuk.one/1010-1008>
21. 11. 2020.

Bibtex Information: <https://iuk.one/1010-1008.bib>

```
@misc{doc:1010-1008,  
  author      = {Clemens H. Cap},  
  title       = {Kommunikation durch Signale},  
  year        = {2020},  
  month       = {11},  
  howpublished = {Electronic document},  
  url         = {https://iuk.one/1010-1008}  
}
```

Typographic Information:

Typeset on November 21, 2020

This is pdfTeX, Version 3.14159265-2.6-1.40.21 (TeX Live 2020) kpathsea version 6.3.2

This is pgf in version 3.1.5b

This is preamble-slides.tex myFormat©C.H.Cap

- 1 Titelseite
- 2 Ziele
- 3 Inhaltsübersicht

1. Fourier Analyse

1.1. Grundidee

- 5 Fourier-Reihe
- 6 Formeln der Fourier-Reihe

1.2. Rechteck-Funktion

- 7 Periodische Rechteck-Funktion
- 8 Approximation der Rechteck-Funktion (1)
- 9 Approximation der Rechteck-Funktion (2)

1.3. Audacity

- 10 Beispiel: Rechteck-Schwingung mit Audacity (1)
- 11 Rechteckschwingung mit Audacity
- 12 Analyse
- 13 Gründe (1)
- 14 Gründe (2)

1.4. Mathematica

- 15 Rechteck-Funktion
- 16 Symbolische Auswertung
- 17 Fourier-Reihe

1.5. Fazit

- 18 Fazit
- 19 Einsatz von Werkzeugen

1.6. Anwendung

- 20 Opennet-Initiative
- 21 Opennet Initiative
- 22 Path-LQ im Zeitverlauf
- 23 Path-LQ nach Fourier-Analyse

2. Nyquist-Theorem

- 25 Abtast-Theorem von Nyquist

2.1. Mechanismen des Abtast-Theorems

- 26 Was bedeutet abtasten?
- 27 Höherfrequente und niederfrequente Rekonstruktion
- 28 Falsch-lagige Abtastung
- 29 Unterabtastung
- 30 Überabtastung
- 31 Komplexere periodische Signale

2.2. Anwendungen des Abtast-Theorems

- 32 Anwendung: Telefonie
- 33 Komprimierung durch Audio-Codecs
- 34 Bedeutung des Abtast-Theorems

3. Störungen

- 36 5 wichtige Störungen
- 37 Dämpfung
- 38 Dezibel-Skala: Motivation
- 39 Dezibel-Skala: Definition
- 40 Dezibel-Skala: Häufig auftretende Werte
- 41 Leistungsdämpfung und Spannungsdämpfung
- 42 Rauschen
- 43 2 Modelle des Rauschens
- 44 Einstreuung
- 45 Einstreuung in Form von Spikes
- 46 Bandlimitierung
- 47 Bandlimitierung
- 48 Verzerrung

4. Shannon-Theorem

- 50 Shannon-Theorem
- 51 Beispiel: Alte Telefonleitung
- 52 Grenzfälle
- 53 Asymptotische Abschätzung
- 54 Grenzen des Shannon-Theorems

Legende:

-  Fortsetzungsseite
-  Seite ohne Überschrift
-  Bildseite